Итак, доказана

Теорема 3. *Если точное решение x уравнения* (1) *истокопредставимо, то при условии* (4) *для метода* (3) *справедлива оценка погрешности* $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/2}(4n\alpha)^{-s/2}\left\|z\right\| + 2\sqrt{n\alpha}\,\delta$.

Оптимизировав по n полученную оценку погрешности, найдем значение $n_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)}\alpha^{-1}\left\|z\right\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}$, подставив которое в искомую оценку, получим её оптимальное значение $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot 2^{-s/(2(s+1))}\left(\frac{s}{2}\right)^{-s/(2(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}$.

Оптимальная оценка погрешности метода (3) не зависит от α, но от α зависит $n_{\text{опт}}$ и, значит, объём вычислительной работы. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию (4), и так, чтобы $n_{\text{опт}} \in Z$.

СХОДИМОСТЬ НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Наумовец С.Н., Матысик О.В.
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г.Брест

1. Введение

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом – теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения.

Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках, поскольку, прежде всего, в приложениях возникают и имеют большое значение подобные некорректные задачи. Потребности практики приводят к необходимости решения некорректно поставленных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями первого рода.

Для их решения широко используются итерационные схемы. Поэтому большое значение имеют разработка и изучение итерационных методов, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности. Важность изучения таких методов решения операторных уравнений объясняется также и тем, что эти методы легко реализуются на ПЭВМ.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль является собственным значением, т.е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем неявную итерационную процедуру

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1} = x_n + \alpha A y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Докажем сходимость итерационной процедуры (2) к решению операторного уравнения (1) в случае неединственного решения. Более того, покажем, что в этом случае итерационный процесс (2) сходится к решению с минимальной нормой.

3. Сходимость метода в случае неединственного решения

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, а через $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha > 0$. *Тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) итерационный метод (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство

Применив оператор A к (2), получим $A(E + \alpha A^2)x_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2 y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как в нашем случае $AP(A)y = 0$, то получим $(E + \alpha A^2)(Ax_n - \Pi(A)y) = Ax_{n-1} - \Pi(A)y$.

Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(E + \alpha A^2)v_n = v_{n-1}$. Отсюда $v_n = (E + \alpha A^2)^{-1} v_{n-1}$, следовательно, $v_n = (E + \alpha A^2)^{-n} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определён в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\left\|(E + \alpha A^2)^{-1}\right\| \leq 1$, и поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E + \alpha A^2)^{-n} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n}\, dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n}\, dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+ \left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{1}{(1 + \alpha\lambda^2)^n}\, dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| \leq$$

$$\leq \left\|E_{\varepsilon_0} v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\|v_0\| < \varepsilon$$

при $n \to \infty$, $\varepsilon_0 \to 0$. Здесь $\dfrac{1}{1 + \alpha\lambda^2} \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \to 0$, откуда получим $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ (см. [1]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть итерационный процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда итерационная процедура (2) примет следующий вид

$$(E + \alpha A^2)x_n = x_{n-1} + \alpha A\Pi(A)y = x_{n-1} + \alpha A^2 x^* =$$

$$= (E + \alpha A^2)x_{n-1} - \alpha A^2 x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = (E + \alpha A^2)x_{n-1} + \alpha A^2(x^* - x_{n-1}).$$

Отсюда запишем $x_n = x_{n-1} + \alpha A^2 \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - x_{n-1}\right)$.

Последнее равенство разобьём на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} A^2 P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим через $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right)$$

получим $w_n = w_{n-1} - \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} w_{n-1}$.

Следовательно, $w_n = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1} w_{n-1} = \ = \left(E + \alpha A^2\right)^{-n} w_0$. А так как $\alpha > 0$, то справедливо:

$$\|w_n\| = \left\|\left(E + \alpha A^2\right)^{-n} w_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} \frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\, dE_\lambda w_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\, dE_\lambda w_0\right\| +$$

$$+ \left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\, dE_\lambda w_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda w_0\right\| \le$$

$$\le \left\|E_{\varepsilon_0} w_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\|w_0\| < \varepsilon$$

при $n \to \infty$, $\varepsilon_0 \to 0$ и, следовательно, $w_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как у нас* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т.е. итерационный процесс* (2) *сходится к решению с минимальной нормой.*

Литература

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichun-gen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, N 2. – P. 166-176.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Панасик Д.А., Рыбачук Г.Г.

Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, Брест

Необходимость решения систем линейных и нелинейных уравнений на ЭВМ существует давно. Среди задач вычислительной математики, требующих решения СЛАУ, различают собственно задачи на решение СЛАУ, а также практически все нелинейные задачи, решаемые итерационными методами, которые сводятся к последовательному решению СЛАУ на каждом шаге вычислительного процесса. Поэтому математики всегда